SYLLABUS DU CAPEM 2017-2018

JEAN-PAUL CALVI ET MURIEL CASALIS

— **Objectif**.
  (1) Préparer — en re-mobilisant et en complétant des savoirs anciens — des étudiants *en reconversion professionnelle* à suivre efficacement une licence de mathématiques destinée au futurs enseignants de mathématiques.
  (2) Apporter à des *professeurs de mathématiques auxiliaires* les connaissances mathématiques fondamentales sans lesquelles ils ne peuvent pas efficacement enseigner.
— **Prérequis**. Une formation initiale scientifique d'un niveau au moins équivalent à un L2 et comportant une composante mathématique suffisante.
— **Compétences**.
  — Maitriser les connaissances mathématiques fondamentales nécessaires à la poursuite d'études en licence et à l'enseignement des mathématiques dans l'enseignement secondaire.
  — Être capable de conjecturer des propriétés simples, de les démontrer, rédiger de manière rigoureuse des démonstrations simples.
  — Savoir construire une démarche de recherche et/ou de justification faisant appel à l'outil informatique.
  — Apprendre à travailler seul en s'appuyant sur des ressources bibliographiques ou numériques.

1

Les enseignements d'Analyse et d'Algèbre sont alternés et se prolongent sur toute l'année. Ils comporteront 4 séances de 3 heures réservées à des travaux pratiques sur machine (programmation sous Python). En dehors des stages intensifs, les séquences pédagogiques se déclinent sur un rythme bi-hebdomadaire.

2. Analyse

2.1. **Corps de nombres.** Q, R. Le corps des nombres complexes. Modules. Conjugués. Différentes représentations des nombres complexes, équations de degré 2. Racines de l'unité.

2.2. **Suites numériques.** Suites remarquables, convergence, critère de Cauchy, encadrement par des suites de référence.

2.3. **Fonctions numériques définies sur un un intervalle de R.** Limites. Continuité. Opérations sur les fonctions continues. Exemples simples de fonctions discontinues. Dérivabilité. Opérations sur les fonctions dérivables, formules de dérivations, formule de Leibniz. Tangentes. Exemples simples de fonctions continues non dérivables (en un point). Théorème des valeurs intermédiaires et application à la méthode de dichotomie. Théorème de Rolle et théorème des accroissements finis. Application à l'étude de la monotonie d'une fonction. Fonctions usuelles (exp, log, fonctions trigonométriques, réciproques). Extremums.

2.4. **Calcul intégral.** Intégrale de Riemann (notions sur la construction). Techniques usuelles de calcul de primitives (Intégration par partie, changement de variable). Exemples simples. Formule de Taylor avec reste intégral. Intégrales généralisées.

2.5. **Séries numériques.** Séries à termes positifs, séries géométriques, séries de Riemann, comparaison série intégrales, tests de convergence (fondamentaux). Séries à termes quelconques. Séries alternées, théorème de Leibniz, d'Abel, estimation du reste. Applications (directes).

2.6. **Équations différentielles élémentaires.** Équations linéaires d'ordre un et deux à coefficients constants. Équations différentielles linéaires du premier ordre. Étude d'autres types d'équation sur des exemples.

2.7. **Suites et séries de fonctions.** Différents type de convergence (simple, uniforme, normale). Analyse de la limite (continuité, dérivabilité). Exemples simples.

2.8. **Séries entières.** Rayon de convergence. Propriété de la somme (dérivées et forme des dérivées). Développement en série entière des principales fonctions analytiques (fractions rationnelles, exponentielles, circulaires et combinées).

2.9. **Séries de Fourier.** Fonctions 2π périodiques. Définition et propriété élémentaires des séries de Fourier. Théorème de Dirichlet (admis). Exemples.

2.10. **Topologie sur R^n (essentiellement R^2, R^3).** Normes usuelles, boules, notion d'ouverts, de fermés. Ensembles bornés, voisinages, limite de suite, de fonction, continuité. Compacts (fermés bornés). Propriétés des fonctions continues sur les ensembles compacts.

3. Algèbre

3.1. **Le langage des ensembles.** La formulation des propositions mathématiques. Les applications (injections, surjections, bijections).

3.2. **Arithmétique dans Z.** Décomposition en produit de nombre premiers. PGCD, PPCM. Lemme de Gauss. Théorème de Bézout. Algorithme d'Euclide. Illustration des divers types de raisonnements mathématiques.

3.3. **Polynômes à coefficients dans Q, R ou C.** Racines des polynômes. Factorisation. Division euclidienne. Lien entre racines et coefficients. Formule d'interpolation de Lagrange. Formule de Taylor pour les polynômes.

3.4. **Arithmétique modulaire élémentaire.** Relations d'équivalence, opérations sur les classes, applications élémentaires). Techniques élémentaires de codage basées sur l'arithmétique modulaire.

3.5. **Algèbre linéaire fondamentale.** Espaces vectoriels (surtout de dimension finie), sous-espaces vectoriels, familles libres, liées, bases dimensions. Applications linéaires, noyau, isomorphismes, théorème du rang (admis).

3.6. **Algèbre matricielle.** Algèbre des matrices, matrices remarquables (diagonales, triangulaires, symétriques, orthogonales) et propriétés (simples). Déterminant. Applications aux systèmes linéaires. Réduction LU. Lien avec la méthode de Gauss.

3.7. **Algèbre bilinéaire.** Forme bilinéaire, symétrique (définie) positive. Formes quadratique associées. Produit scalaires. Notions géométriques associées. Réduction des formes quadratiques. Signature.

3.8. **Réduction d'endomorphisme.** Valeurs et vecteurs propres. Polynôme caractéristique. Théorème de Cayley-Hamilton (admis). Diagonalisation. Cas des matrices symétriques. Exemples et applications simples.

3.9. **Notions géométriques fondamentales.** Droites dans le plan euclidien. Droites et plans dans l'espace euclidien. Repères. Barycentres. Distances. Applications affines (Translations-homothéties). Introduction à l'étude des isométries.

4. Aléatoire

Modèles probabilisés, expérience aléatoire. Variables aléatoires discrètes. Conditionnement élémentaire. Statistique descriptive.